الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التربية الوطنية

الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات
امتحان بكالوريا التعليم الثانوي
الشعبة: تقني رياضي
دورة: 2022

اختبار في مادة: الرياضيات
المدة: 04 سا و30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

a و b عددان طبيعيان حيث $a=2022$ و $b=124$

1) عيّن باقي القسمة الإقليدية لكلّ من العددين a و b على 7

2) أُدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 5^n على 7

3) بيّن أنّ العدد a^a+b^b+4 يقبل القسمة على 7

4) نضع، من أجل كلّ عدد طبيعي n، $A_n=2021^n+2022^n+2023^n+2024^n$

– بيّن أنّ $A_n\equiv 1+5^n+6^n\,[7]$ ثم عيّن قيم العدد الطبيعي n حتى يكون A_n+1 مضاعفا للعدد 7

التمرين الثاني: (04 نقاط)

أجب بصحيح أو خاطئ مع التبرير في كلّ حالة مما يلي:

1) من أجل كلّ عدد طبيعي n، $n(n^2-1)$ مضاعف للعدد 3

2) الدالة العددية $x\mapsto x^2+2x+x\ln x$ حلّ للمعادلة التفاضلية $y''=2+\frac{1}{x}$ على $]0;+\infty[$

3) المستقيم ذو المعادلة $y=x+e$ مماس لمنحنى الدالة f المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x+(x-2)e^x$

4) (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ: $v_n=\ln\frac{ne^n}{n+1}$

عبارة المجموع S_n حيث $S_n=v_1+v_2+\dots+v_n$ هي: $S_n=\frac{n(n+1)}{2}-\ln(n+1)$

التمرين الثالث: (05 نقاط)

(u_n) و (v_n) المتتاليتان العدديتان المعرّفتان على $\mathbb{N}^*$ كما يلي: $u_1=2$

ومن أجل كلّ عدد طبيعي غير معدوم n، $u_{n+1}=\frac{n}{2n+2}u_n-\frac{1}{n+1}$ و $v_n=n\,u_n+2$

1) أحسب u_2 و u_3

2) أ– برهن أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$

ب– أكتب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n

3) أحسب، بدلالة n، المجموع S_n حيث $S_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n$

4) نضع من أجل كلّ عدد طبيعي n غير معدوم، $w_n = \dfrac{4n}{v_n - nu_n}$

أُحسب، بدلالة n ، المجموع S'_n حيث $S'_n = w_1 + w_2 + \dots + w_n$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

f الدّالة العددية المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $f(x) = 1 + (x-1)\ln x$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O,\vec{i};\vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\| = 2cm$

1) أ- أدرس حسب قيم العدد الحقيقي x الموجب تماما إشارة كلّ من $\dfrac{x-1}{x}$ و $\ln x$

ب- إستنتج حسب قيم العدد الحقيقي x الموجب تماما إشارة $\dfrac{x-1}{x} + \ln x$

2) أ- أحسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

ب- أدرس اتّجاه تغيّر الدّالة f ثمّ شكّل جدول تغيراتها.

3) h الدّالة العددية المعرّفة على $]0;+\infty[$ كما يلي : $h(x) = x - 2 + \ln x$

أ- بيّن أنّ الدّالة h متزايدة تماما على $]0;+\infty[$

ب- برهن أنّ المعادلة $h(x) = 0$ تقبل حلاً وحيدا α حيث $1,5 < \alpha < 1,6$ ثم بيّن أنّ $\ln(\alpha) = 2 - \alpha$

جـ- بيّن أنّ $y = \dfrac{-\alpha^2 + 3\alpha - 1}{\alpha} x$ معادلة لـ (T) مماس (C_f) في النقطة ذات الفاصلة α

4) أنشئ (T) و (C_f) على $]0;4]$ (نأخذ $\dfrac{-\alpha^2 + 3\alpha - 1}{\alpha} = 0,8$)

5) أ- بيّن أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي x موجب تماما، $f(x) - x = (x-1)(-1 + \ln x)$

ب- أدرس حسب قيم العدد الحقيقي x الموجب تماما إشارة $f(x) - x$

6) K الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $K(x) = -\dfrac{3}{4}x^2 + 2x + \left(\dfrac{1}{2}x^2 - x\right)\ln x$

أ- بيّن أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي x موجب تماما $K'(x) = f(x) - x$

ب- أحسب مساحة حيز المستوي المحدد بـ (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها: $y = x$ ، $x = 1$ و $x = e$

7) g الدّالة المعرّفة على $]-2;+\infty[$ بـ : $g(x) = (x+1)\ln(x+2)$ ، (C_g) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

- بيّن أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي x من $]-2;+\infty[$ ، $g(x) = f(x+2) - 1$

- استنتج أنّ (C_g) صورة (C_f) بانسحاب يطلب تعيين شعاعه. (لا يُطلب إنشاء (C_g))

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

نضع من أجل كلّ عدد طبيعي n : $a=5n+2$ ، $b=n+1$ ، $c=9n+2$

و $d=p\gcd(a;b)$ ، $d'=p\gcd(b;c)$

1) عيّن القيم الممكنة لكلّ من d و d' ثم استنتج $p\gcd(a;b;c)$

2) عيّن قيم العدد الطبيعي n حتى يكون العدد b قاسما لـ a

3) نعتبر المعادلة: $17x-4y=29 \cdots (E)$ حيث x و y عددان صحيحان.

بيّن أنّه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة (E) فإنّ $x\equiv 1[4]$ ثم حل المعادلة (E)

4) عيّن الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة (E) والتي تحقق $xy<279$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

عيّن الاقتراح الصحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاثة في كلّ حالة من الحالات التالية مع التبرير.

1) مجموعة حلول المعادلة $e^{(\ln x)^2-6}=x$ ذات المجهول الحقيقي x في المجال $]0;+\infty[$ هي:

أ) $S=\{e^3\}$ ب) $S=\{-2;3\}$ جـ) $S=\{e^{-2};e^3\}$

2) باقي القسمة الإقليدية للعدد 9^{2023} على 7 هو:

أ) 2 ب) 3 جـ) 5

3) العدد الحقيقي $\int_0^{\ln 4043}\frac{1}{1+e^{-x}}\,dx$ يساوي :

أ) 2022 ب) $\ln 2022$ جـ) $\ln 4043$

4) F الدالة العددية المعرّفة على $]0;+\infty[$ كما يلي : $F(x)=(x+2)\sqrt{x}$

F دالة أصلية للدالة f على المجال $]0;+\infty[$. عبارة الدالة f هي :

أ) $f(x)=\frac{3x+2}{2x}$ ب) $f(x)=\frac{3x+2}{2x}\sqrt{x}$ جـ) $f(x)=\frac{2x+3}{2x}\sqrt{x}$

التمرين الثالث: (05 نقاط)

(u_n) المتتالية العددية المعرّفة بحدها الأول u_0 حيث $u_0=0$ ومن أجل كلّ عدد طبيعي n، $u_{n+1}=\frac{1}{2}(u_n-2)$

1) برهن بالتراجع أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n، $u_n>-2$

2) أُدرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) ثم إستنتج أنّ (u_n) متقاربة .

3) (v_n) المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي $v_n=\frac{1}{u_{n+1}-u_n}$

أ- برهن أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها 2 ثم أكتب v_n بدلالة n

ب- أحسب، بدلالة n، المجموع S_n حيث $S_n=\frac{1}{v_0}+\frac{1}{v_1}+\cdots+\frac{1}{v_n}$

4) أ- بيّن أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n ، $u_n=2\left(\frac{1}{2^n}-1\right)$ ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

ب- أحسب بدلالة n المجموع S'_n حيث $S'_n=u_0+u_1+\cdots+u_n$

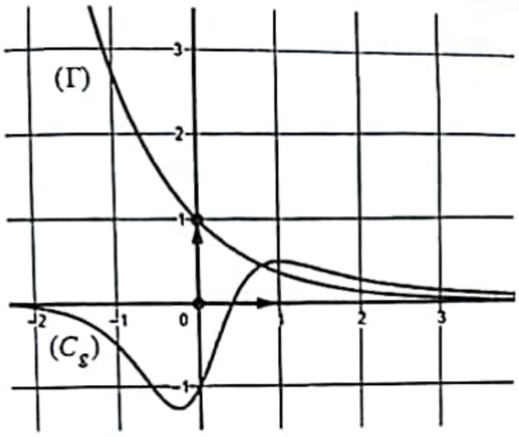
التمرين الرابع: (07 نقاط)

I) المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$

(Γ) التمثيل البياني للدالة : $x\mapsto e^{-x}$ و (C_g) التمثيل البياني للدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ ب : $g(x)=\frac{x^2+2x-1}{(x^2+1)^2}$

α فاصلة نقطة تقاطع (C_g) و (Γ)

(كما هو مبيّن في الشكل المقابل)



1) بقراءة بيانية، حدّد حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)-e^{-x}$

2) تحقّق حسابيا أنّ $0,7<\alpha<0,8$

II) f الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ ب : $f(x)=e^{-x}-\frac{x+1}{x^2+1}$، (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد متجانس.

1) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ ثم أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ وفسّر النتيجة بيانيا .

2) أ- بيّن أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي x ، $f'(x)=g(x)-e^{-x}$

ب- إستنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيّراتها.

3) أ- أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-e^{-x}\right]$ وفسّر النتيجة بيانيا.

ب- أدرس الوضعية النسبية للمنحنيين (C_f) و (Γ)

4) أ- أكتب معادلة لـ (T) مماس (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 0

ب- أنشئ (T) و (Γ) و (C_f) (نأخذ $f(\alpha)\simeq-0.6$)

جـ- ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m، عدد وإشارة حلول المعادلة $f(x)-m=0$

5) علما أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي x من المجال $[-1;0]$: $\frac{1}{2}x+1\leq\frac{1}{x^2+1}\leq\frac{5}{4(1-x)}$

أ- عيّن حصرا للعدد I حيث : $I=\int_{-1}^{0}\frac{dx}{x^2+1}$

ب- أحسب J حيث : $J=\int_{-1}^{0}\frac{x}{x^2+1}dx$ ثم استنتج حصرا لـ A، مساحة الحيز المستوي المحدّد بالمنحنيين (Γ) و (C_f) والمستقيمين اللذين معادلتاهما: $x=-1$ و $x=0$

انتهى الموضوع الثاني